



ce
pre
UNI

CICLO
PREUNIVERSITARIO
2024-1

Trigonometría

FUNCIONES

TRIGONOMÉTRICAS II



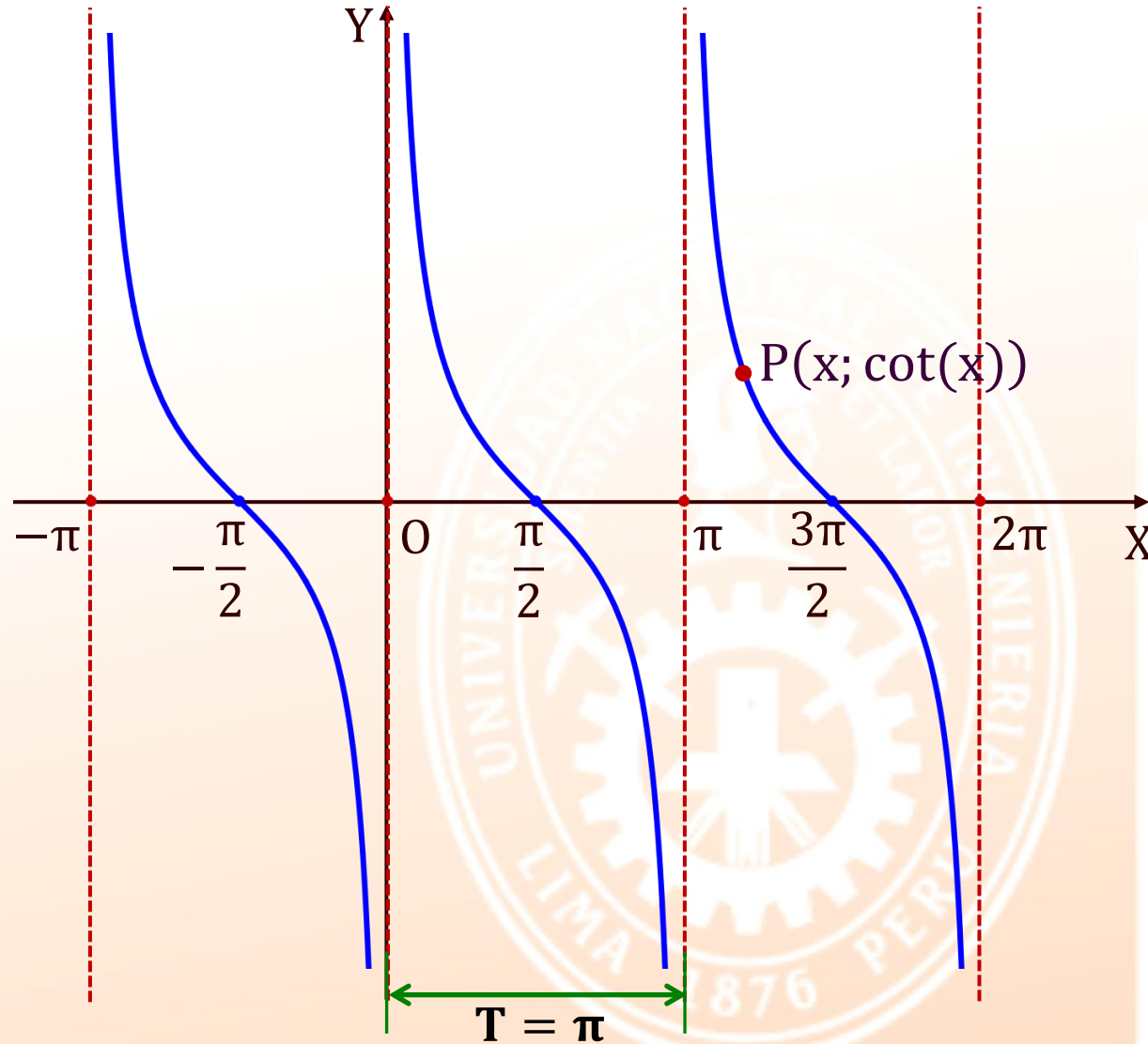


FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS II

FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA COTANGENTE

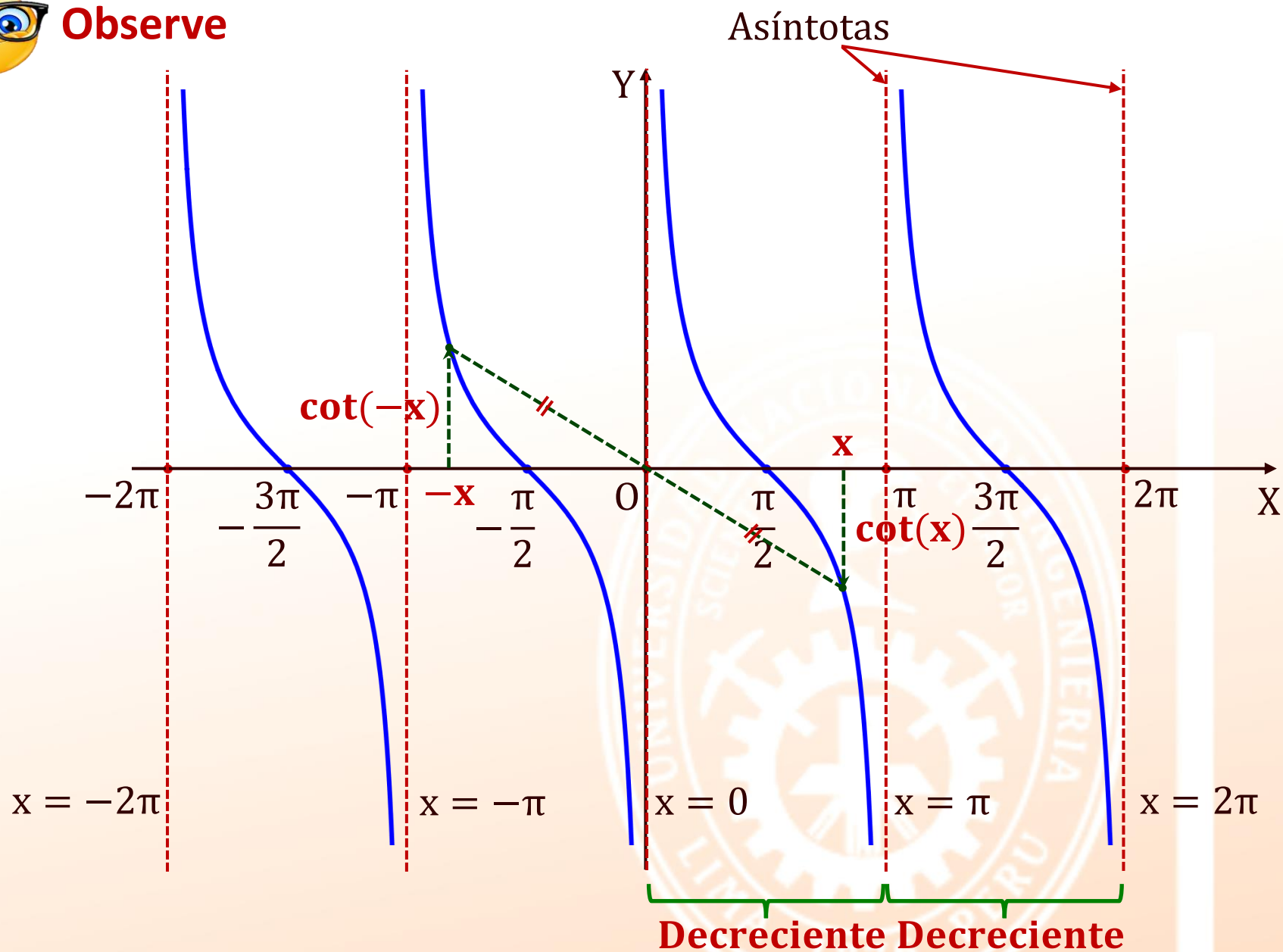
$$f = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y = \cot(x); x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$$

Su gráfica es:

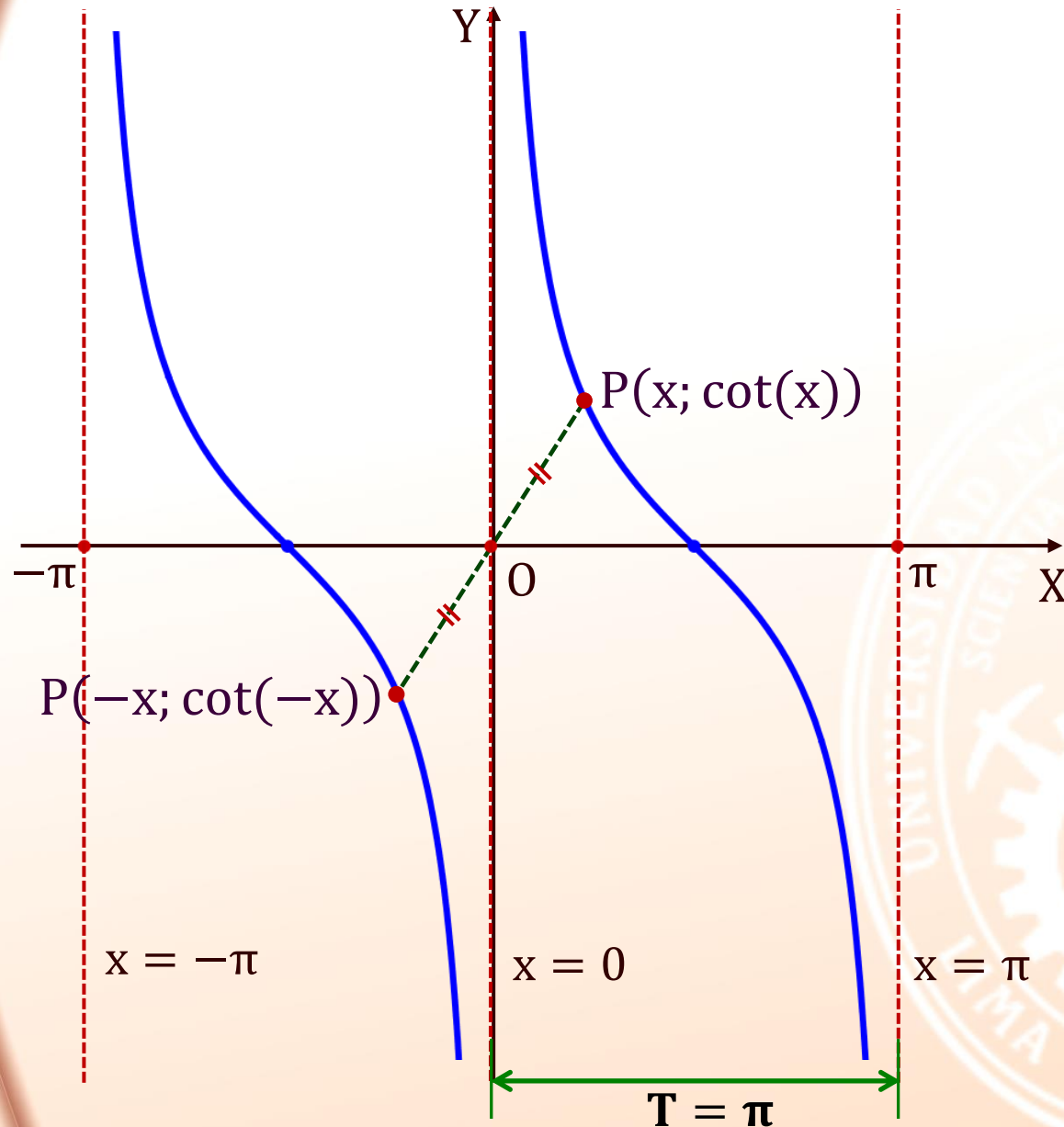

ce
pre
UNI



Observe



Análisis de la función cotangente



- ✓ $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$
- ✓ $\text{Ran}(f) = \mathbb{R} \Rightarrow -\infty < \cot(x) < +\infty$
- ✓ Por tipo de simetría: Es función impar:
 $\forall x \in \text{Dom}(f): \cot(-x) = -\cot(x)$
- ✓ Periodo principal: π .
- ✓ Es una función decreciente en intervalos de la forma
 $\langle k\pi; k\pi + \pi \rangle; \forall k \in \mathbb{Z}$
- ✓ Puntos de discontinuidad:
 $\{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$
- ✓ Asíntotas verticales: $x = k\pi; \forall k \in \mathbb{Z}$

PROBLEMA 01

Dada la función f , definida por $f(x) = \tan(3x) + \cot(2x) + \cot(x)$

Calcule el número de puntos de discontinuidad en el intervalo de $\left(0; \frac{3\pi}{2}\right)$

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 5

CLAVE: E**PROBLEMA 02**

Determine el rango de la función f , definida por

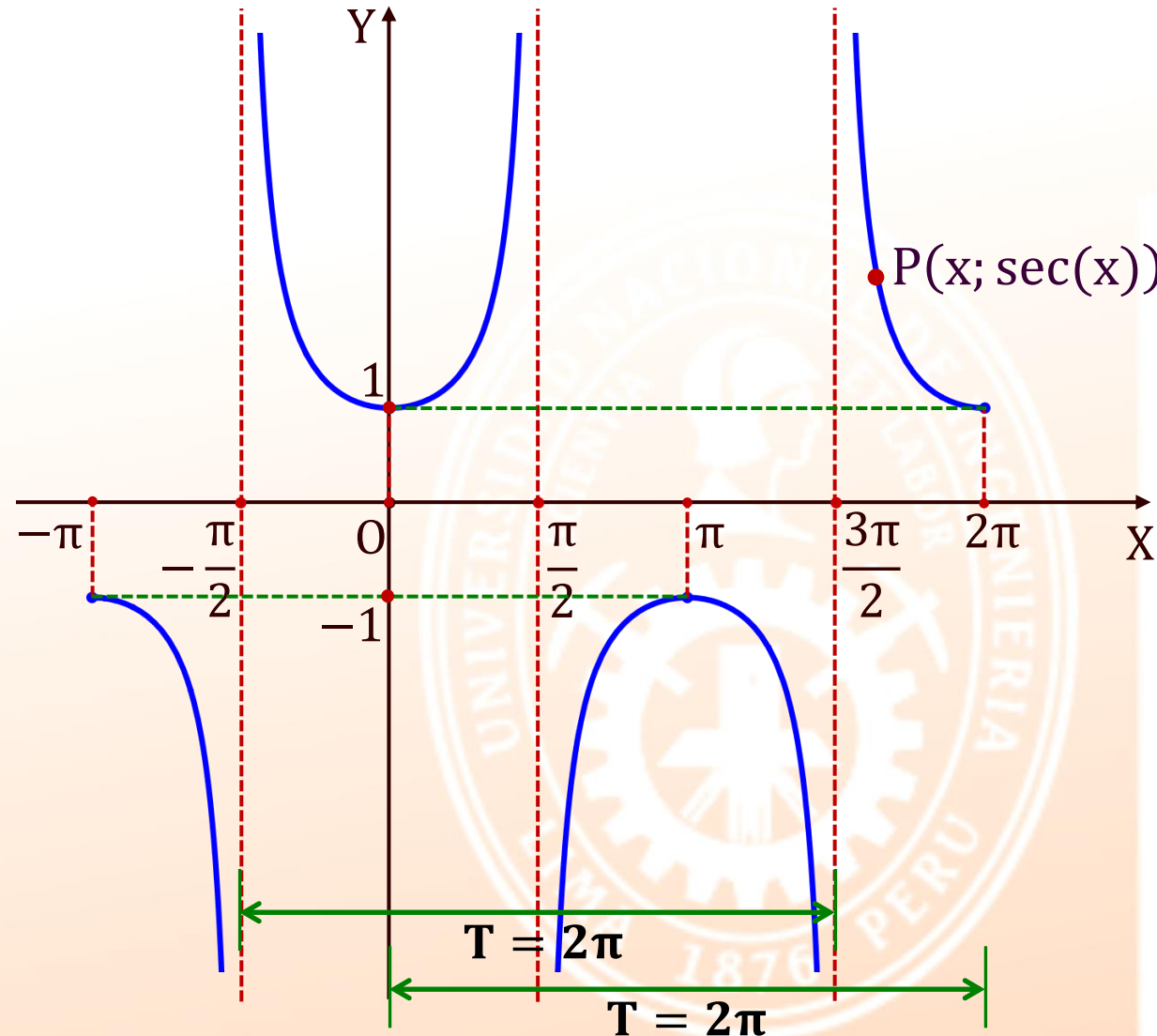
$$f(x) = 4\cot\left[\frac{\pi}{2}\sin^2(x)\right] + 1, \forall x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}\right]$$

A) $[1; 4\sqrt{2}]$ B) $[1; 4\sqrt{2} + 2]$ C) $[1; 4\sqrt{2} + 3]$ D) $[1; 4\sqrt{2} + 5]$ E) $[4\sqrt{2}; 4\sqrt{2} + 6]$ **CLAVE: D**

FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA SECANTE

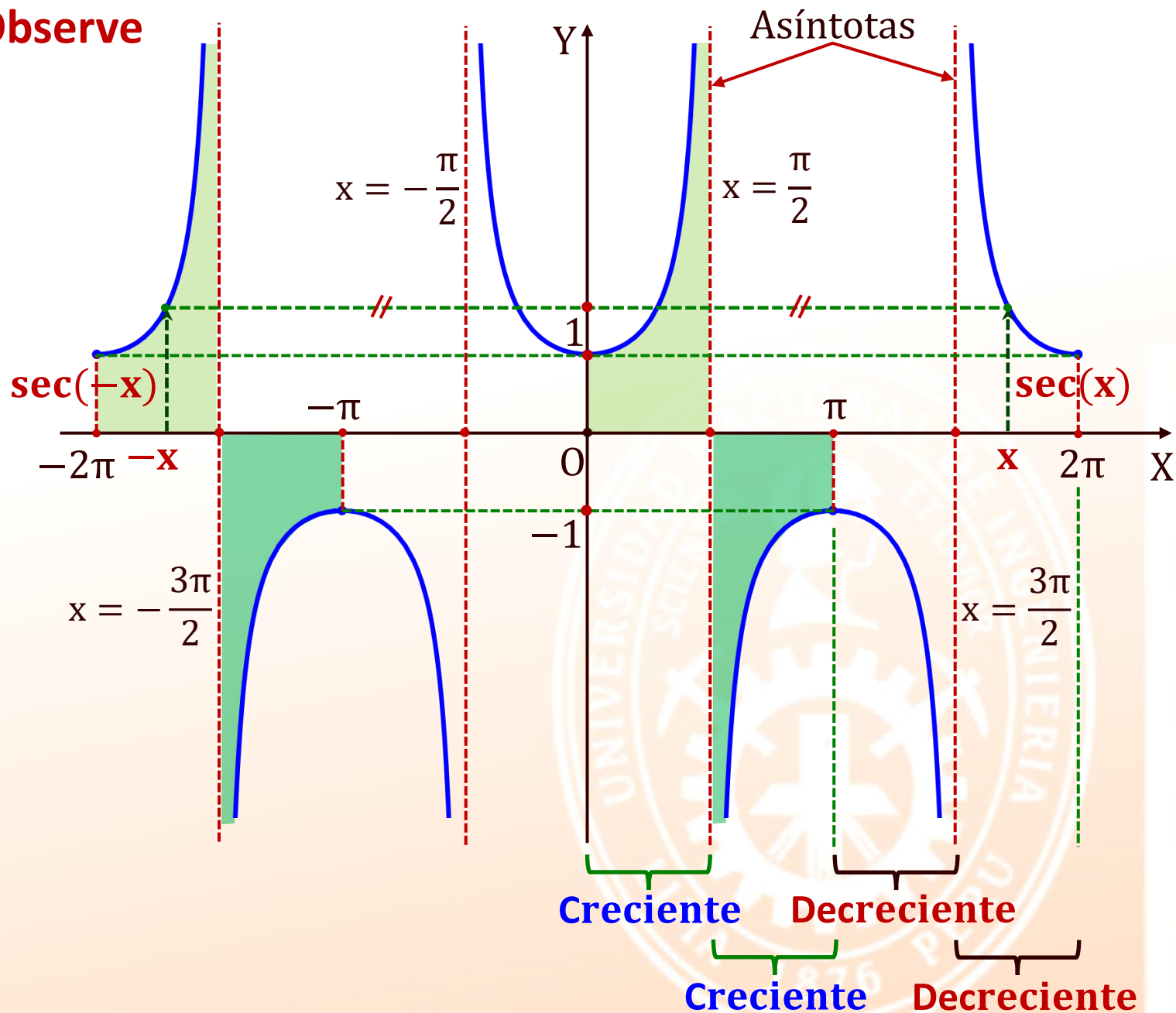
$$f = \left\{ (x; y) \in \mathbb{R}^2 / y = \sec(x); x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Su gráfica es:



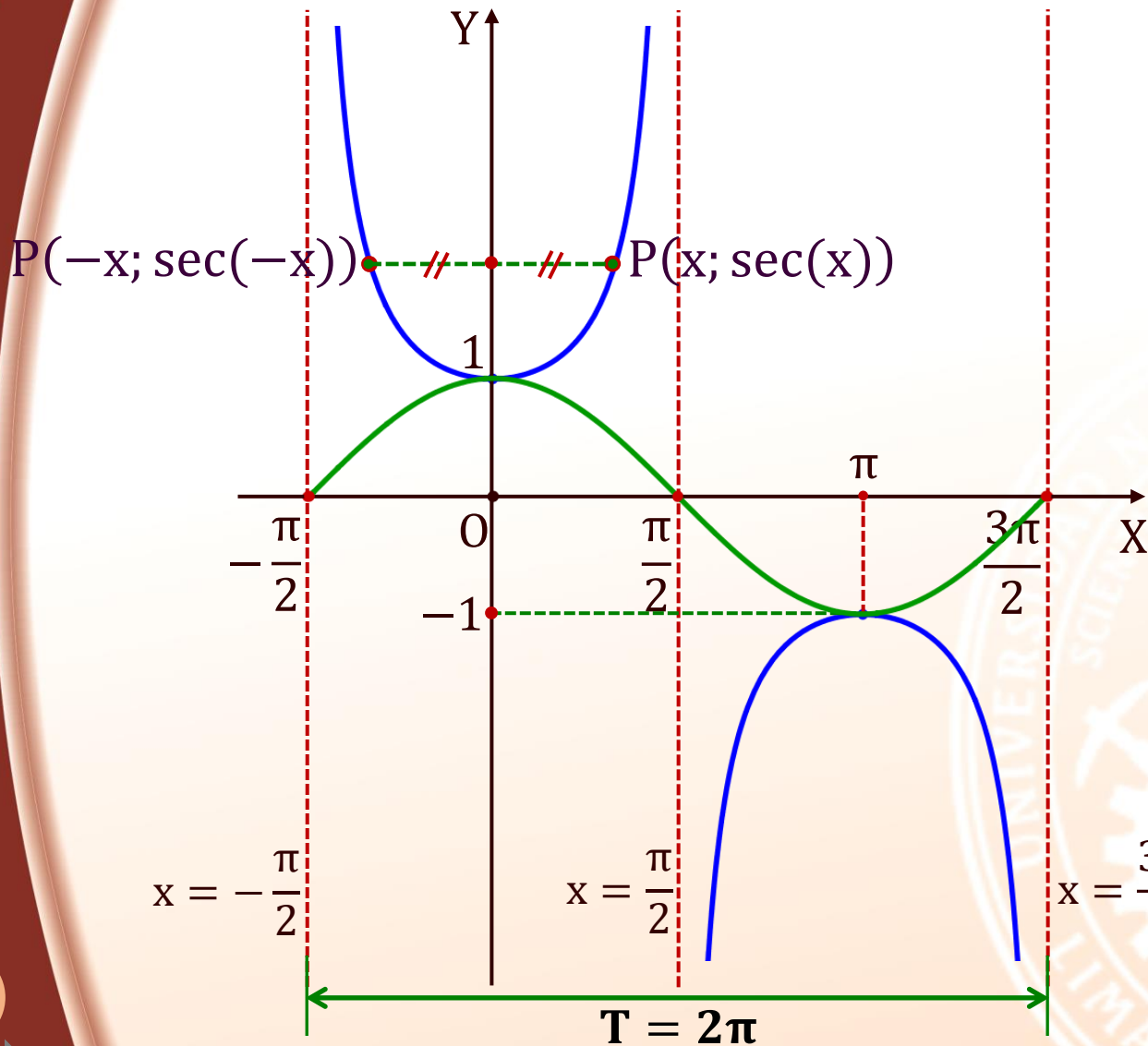


Observe



ce
pre
UNI

Análisis de la función secante



$$\checkmark \text{ Dom}(f) = \mathbb{R} - \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2}; \forall k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\checkmark \text{ Ran}(f) = \mathbb{R} - \langle -1; 1 \rangle$$

$$-\infty < \sec(x) \leq -1 \vee 1 \leq \sec(x) < +\infty$$

$$|\sec(x)| \geq 1$$

✓ Función par:

$$\forall x \in \text{Dom}(f): \sec(-x) = \sec(x)$$

✓ Periodo principal: 2π

✓ Es una función creciente en

$$\left\langle 2k\pi; 2k\pi + \frac{\pi}{2} \right\rangle; \left\langle 2k\pi + \frac{\pi}{2}; 2k\pi + \pi \right\rangle$$

✓ Es una función decreciente en

$$\left\langle 2k\pi - \frac{\pi}{2}; 2k\pi \right\rangle; \left\langle 2k\pi + \pi; 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \right\rangle$$

✓ Puntos de discontinuidad:

$$\left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2} / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

✓ Asíntotas verticales: $x = \frac{(2k+1)\pi}{2}; \forall k \in \mathbb{Z}$

PROBLEMA 03

Determine el dominio de la función f , definida por

$$f(x) = \sec\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sec(x) + \cot\left(x + \frac{\pi}{6}\right), \forall k \in \mathbb{Z}$$

- A) $\mathbb{R} - \{k\pi\}$ B) $\mathbb{R} - \left\{\frac{k\pi}{2}\right\}$ C) $\mathbb{R} - \left\{\frac{k\pi}{6}\right\}$
 D) $\mathbb{R} - \left\{(2k + 1)\frac{\pi}{6}\right\}$ E) $\mathbb{R} - \left\{(2k + 1)\frac{\pi}{2}\right\}$

CLAVE: D

PROBLEMA 04

Determine el dominio de la función f , definida por

$$f(x) = \sec[\pi \operatorname{sen}(x)], \forall k \in \mathbb{Z}$$

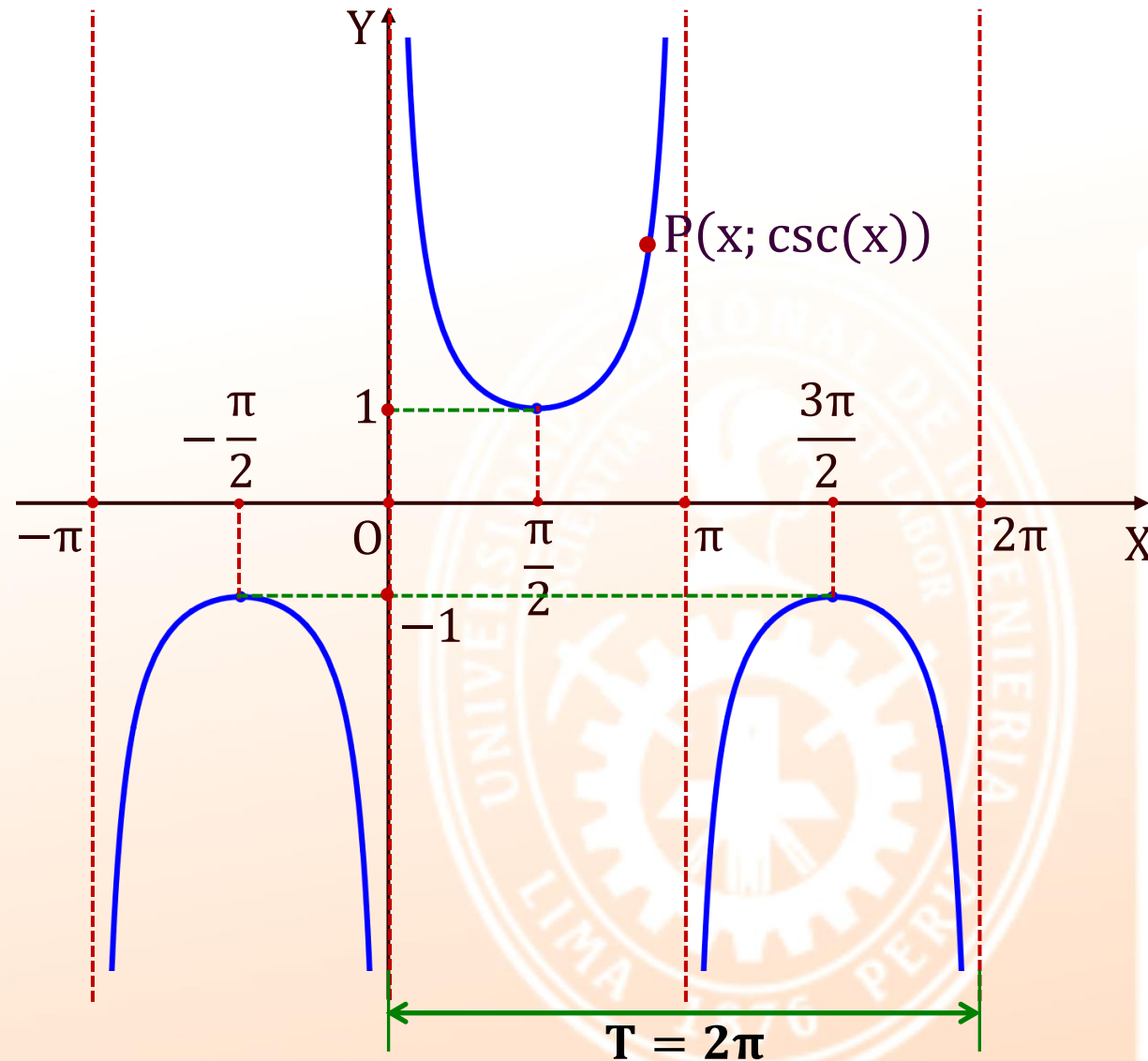
- A) $\mathbb{R} - \{k\pi\}$ B) $\mathbb{R} - \left\{\frac{k\pi}{2}\right\}$ C) $\mathbb{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{6}\right\}$
 D) $\mathbb{R} - \left\{k\pi - \frac{\pi}{6}\right\}$ E) $\mathbb{R} - \left\{k\pi \pm \frac{\pi}{6}\right\}$

CLAVE: E

FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA COSECANTE

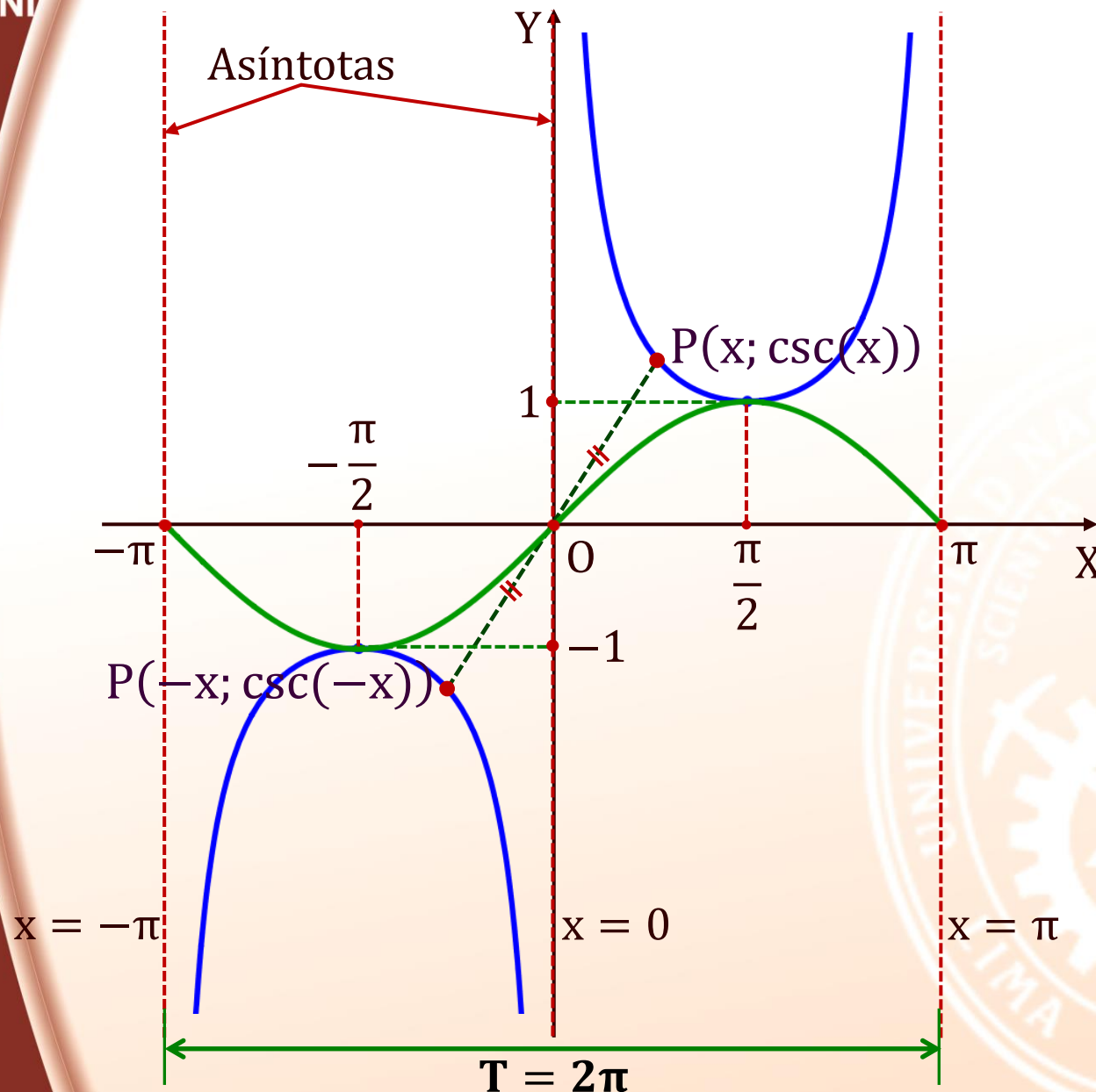
$$f = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y = \csc(x); x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$$

Su gráfica es:



ce
pre
UNI

Análisis de la función cosecante



$$\checkmark \text{ Dom}(f) = \mathbb{R} - \{k\pi; \forall k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\checkmark \text{ Ran}(f) = \mathbb{R} \setminus \langle -1; 1 \rangle$$

$$-\infty < \mathbf{csc(x)} \leq -1 \vee 1 \leq \mathbf{csc(x)} < +\infty$$

$$|\mathbf{csc(x)}| \geq 1$$

✓ Es una función impar:

$$\forall x \in \text{Dom}(f): \mathbf{csc(-x)} = -\mathbf{csc(x)}$$

✓ Periodo principal: 2π

✓ Es una función creciente en

$$\left\langle 2k\pi - \pi; 2k\pi - \frac{\pi}{2} \right\rangle ; \left\langle 2k\pi + \frac{\pi}{2}; 2k\pi + \pi \right\rangle$$

✓ Es una función decreciente en

$$\left\langle 2k\pi - \frac{\pi}{2}; 2k\pi \right\rangle ; \left\langle 2k\pi; 2k\pi + \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

✓ Puntos de discontinuidad: $\{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

✓ Asíntotas verticales: $x = k\pi; \forall k \in \mathbb{Z}$

PROBLEMA 05

Determine el dominio de la función f , definida por

$$f(x) = \csc \left[\frac{\pi}{4} \left(\sin(3x) + \sqrt{3} \cos(3x) \right) \right], \forall k \in \mathbb{Z}$$

A) $\mathbb{R} - \left\{ (3k + 1) \frac{\pi}{3} \right\}$

B) $\mathbb{R} - \left\{ (3k - 1) \frac{\pi}{3} \right\}$

C) $\mathbb{R} - \left\{ (3k + 2) \frac{\pi}{3} \right\}$

D) $\mathbb{R} - \left\{ (3k - 1) \frac{\pi}{9} \right\}$

E) $\mathbb{R} - \left\{ (6k + 1) \frac{\pi}{6} \right\}$

CLAVE: D

PROBLEMA 06

Determine el dominio de la función f , definida por

$$f(x) = \sqrt{2 - \csc(x)} + \sqrt{\sqrt{3} \csc(x) - 2}, \text{ si } x \in \langle 0; \pi \rangle$$

A) $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3} \right]$

B) $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3} \right]$

C) $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right]$

D) $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3} \right]$

E) $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3} \right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{6} \right]$

CLAVE: E

PROBLEMA 07

Determine el valor mínimo de la función f , definida por

$$f(x) = |\csc(x)|[|\csc(x)| + 4]$$

A) 3

B) 4

C) 5

D) 6

E) 7

CLAVE: C**PROBLEMA 08**

Dada la función f , definida por $f(x) = \frac{\sec(4x)}{\csc(4x)}$, $x \in \left\langle \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right\rangle$

Calcule el número de puntos de discontinuidad

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 5

CLAVE: C

PROBLEMA 09

Dada la función f , definida por

$$f(x) = \tan(x)[\sec(2x) + 1][\sec(4x) + 1], \forall x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$$

Determine el rango de f .

CLAVE: D

- A) $[0; \sqrt{3}]$ B) $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$ C) $[-\sqrt{3}; 0]$ D) $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}] - \{0\}$ E) $[1; \sqrt{3}]$

PROBLEMA 10

Determine el rango de la función f , definida por

$$f(x) = \sec^4(x) + 6\tan^2(x) + 6$$

CLAVE: B

- A) $[6; +\infty)$ B) $[7; +\infty)$ C) $[8; +\infty)$ D) $[9; +\infty)$ E) $[10; +\infty)$

PROBLEMA 11

Determine el rango de la función f , definida por

$$f(x) = \tan(2x) + \tan(2x)\cot(x) - 1, x \in \left\langle \frac{2\pi}{3}; \frac{7\pi}{6} \right\rangle$$

- A) $\langle 2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3} \rangle$ B) $\langle 0; 2 + \sqrt{3} \rangle - \{0\}$ C) $\langle \sqrt{3} - 2; 2 + \sqrt{3} \rangle - \{0\}$
D) $\langle \sqrt{3} - 2; 2 + \sqrt{3} \rangle - \{0; 1\}$ E) $\langle \sqrt{3} - 2; \sqrt{3} \rangle - \{0\}$

CLAVE: D

PROBLEMA 12

Dada la función f , definida por $f(x) = \cot \left[\frac{4\pi}{4x + \frac{9}{x-3}} \right]$, si $x > 3$

Determine el rango de f .

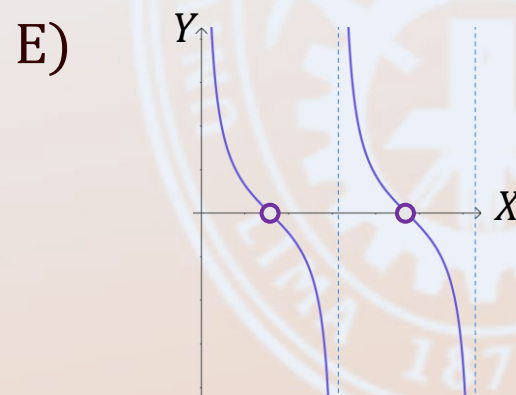
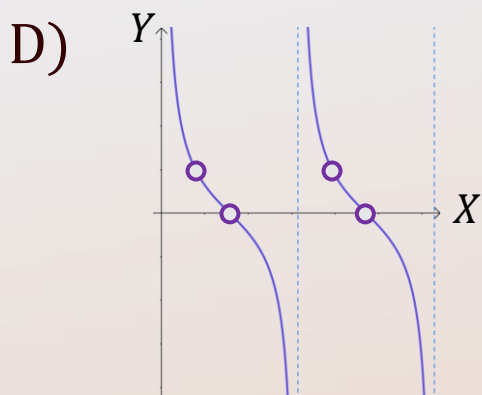
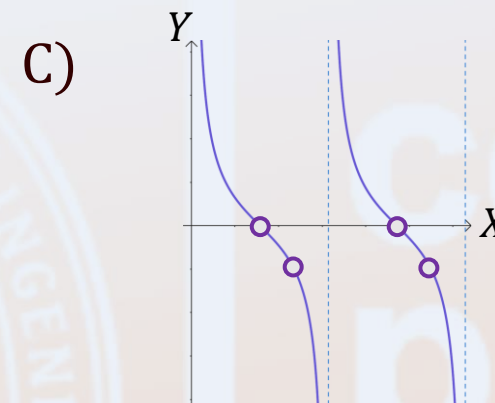
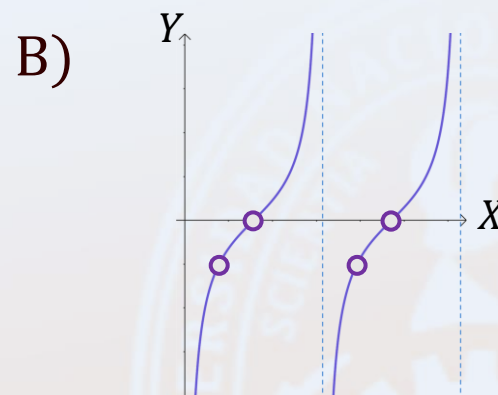
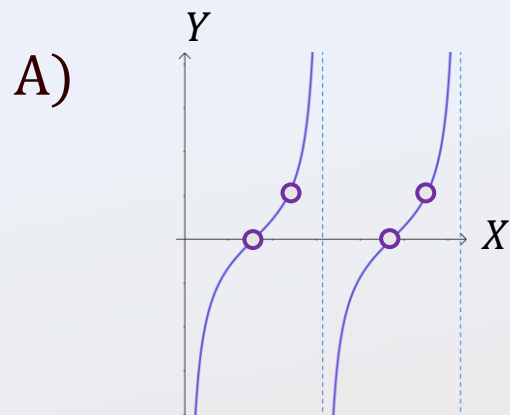
- A) $\left[\frac{1}{2}; +\infty \right)$ B) $[1; +\infty)$ C) $[\sqrt{3}; +\infty)$ D) $[2; +\infty)$ E) $[2\sqrt{3}; +\infty)$

CLAVE: C

PROBLEMA 13

Grafique la función f , definida por

$$f(x) = \frac{1 - \tan(x) + \sec(x)\csc(x)}{1 - \cot(x) + \sec(x)\csc(x)}, x \in \langle 0; 2\pi \rangle$$



CLAVE: C

PROBLEMA 14 (4ta PC CEPRE 2017-2)

Determine el rango de la función f , definida por

$$f(x) = 2\csc^2(x) + 4\csc(x), \text{ donde } x \in \left\langle \pi; \frac{7\pi}{6} \right\rangle$$

CLAVE: D

- A) $\langle 2; +\infty \rangle$ B) $\langle 1; +\infty \rangle$ C) $\langle 0; 2 \rangle$ D) $\langle 0; +\infty \rangle$ E) $\langle 4; +\infty \rangle$

PROBLEMA 15

Sea f la función definida por

$$f(x) = \sen(x) + \cot(x), x \in \left\langle \frac{7\pi}{6}; \frac{5\pi}{4} \right\rangle$$

Determine el rango de f .

A) $\left\langle \frac{2 - \sqrt{2}}{2}; \frac{2\sqrt{3} - 1}{2} \right\rangle$

B) $\left\langle -\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle$

C) $\left\langle \frac{1 - \sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle$

D) $\left\langle -\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \right\rangle$

E) $\left\langle -\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{2\sqrt{3} - 1}{2} \right\rangle$

CLAVE: A

PROBLEMA 16

Sea la función f , definida por

$$f(x) = \sec\left(\frac{x}{2}\right) \csc\left(\frac{x}{2}\right) \sec(x) + 4\cot(2x), \forall x \in \mathbb{Z}$$

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I) $\text{Dom}(f) = \left\{x/x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{k\pi}{2}\right\}; \forall k \in \mathbb{Z}\right\}$

II) $\text{Ran}(f) = \{x/x \in \mathbb{R} - \{1\}\}$

III) Una asíntota vertical es $x = \pi$

A) VVV

B) VVF

C) VFF

D) FVV

E) VFV

CLAVE: E

PROBLEMA 17

Determine el rango de la función f , definida por

$$f(x) = \cot^2(x) + \tan^2(x), \text{ si } x \in \left\langle \frac{\pi}{24}; \frac{\pi}{8} \right\rangle$$

A) $\langle 6; 16\sqrt{3} \rangle$

B) $\langle 6; 28 + 16\sqrt{3} \rangle$

C) $\langle 6; 30 + 16\sqrt{3} \rangle$

D) $\langle 3\sqrt{3}; 20\sqrt{3} \rangle$

E) $\langle 8; 20 + 16\sqrt{3} \rangle$

CLAVE: C

PROBLEMA 18 (4ta PC CEPRE 2022-2)

Determine el dominio de la función f , definida por

$$f(x) = \sec[\sen(x)] + \sen[\sec(x)], \forall k \in \mathbb{Z}$$

A) $\mathbb{R} - \{2k\pi\}$

B) $\mathbb{R} - \left\{ (2k + 1) \frac{\pi}{4} \right\}$

C) $\mathbb{R} - \left\{ \frac{k\pi}{2} \right\}$

D) $\mathbb{R} - \left\{ (2k + 1) \frac{\pi}{2} \right\}$

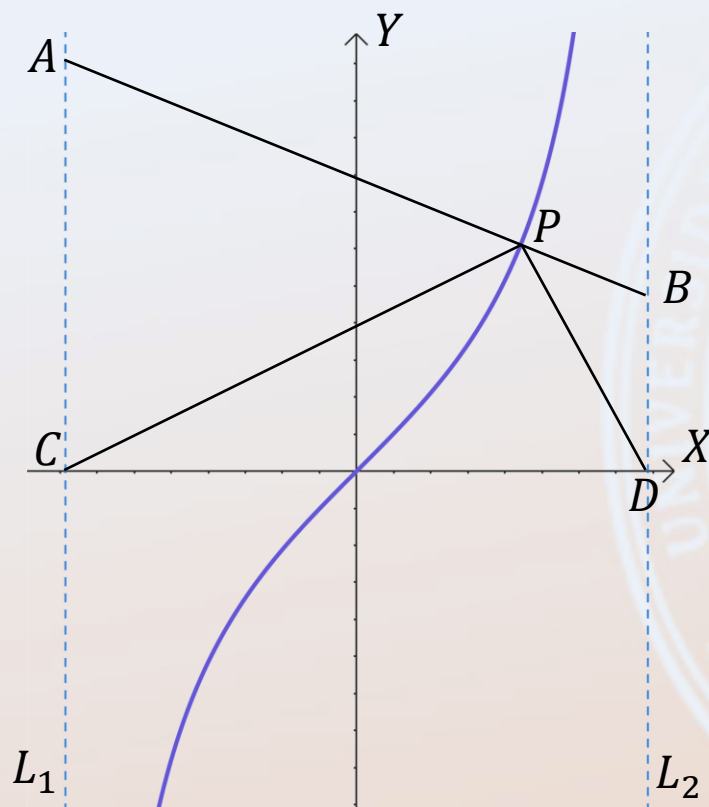
E) $\mathbb{R} - \{k\pi\}$

CLAVE: D

PROBLEMA 19 (4ta PC CEPRE 2022-2)

La gráfica mostrada corresponde a la función f , definida por $f(x) = \tan(x)$, donde L_1 y L_2 son dos de sus asíntotas.

Si $AP = 3(PB)$, calcule el área (en u^2) de la región triangular CPD.



A) $\frac{\pi}{2}$

B) $\frac{\pi}{4}$

C) $\frac{3\pi}{4}$

D) $\frac{3\pi}{8}$

E) π

CLAVE: A

PROBLEMA 20 (EXAMEN UNI 2000-2)

Hallar el rango de $f(x) = |\cot(x)|\sin(x)$

A) $\langle -1; 1 \rangle$

B) $[-1; 1]$

C) $\langle -1; 1 \rangle$

D) $[-1; 1]$

E) $\mathbb{R} - \langle -1; 1 \rangle$

CLAVE: A